Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Al cincilea test de selecţie pentru Olimpiada Internaţională de Matematică

15 mai 2009

Subiectul 1. Fie P şi Q două poligoane congruente (nu neapărat convexe) situate într-un acelaşi plan π. În general, poligonul Q nu poate fi suprapus peste poligonul P doar prin rotaţii şi/sau translaţii în planul π. Arătaţi că poligonul Q poate fi însă descompus într-un număr finit de poligoane, care pot fi apoi recompuse doar prin rotaţii şi/sau translaţii în planul π, astfel încât să obţinem poligonul P.

Subiectul 2. Fie a şi n două numere întregi mai mari sau egale cu 2, care au următoarea proprietate: există un număr întreg $k \geq 2$, astfel încât n să fie un divizor al numărului $(a-1)^k$. Arătaţi că n este un divizor al numărului $a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1$.

Subiectul 3. Fie $n \geq 1$ şi $q \geq 2$ două numere întregi şi $A = \{(a_1, \cdots, a_n) : a_i \in \{0, 1, \cdots, q-1\}, i = 1, \cdots, n\}$. Dacă $a = (a_1, \cdots, a_n)$ şi $b = (b_1, \cdots, b_n)$ sunt două elemente ale mulţimii A, notăm cu $n(a, b)$ numărul de indici $i \in \{1, \cdots, n\}$ pentru care $a_i \neq b_i$. Fie t un număr întreg strict pozitiv şi B o submulţime nevidă a lui A, astfel încât $n(a, b) \geq 2t + 1$, oricare ar fi a şi b două elemente distincte ale lui B. Arătaţi că următoarele două afirmaţii sunt echivalente:

(1) oricare ar fi $a \in A$, există un unic $b \in B$, astfel încât $n(a, b) \leq t$;

(2) $|B| \cdot \sum_{k=0}^{t} \binom{n}{k} (q-1)^k = q^n$, unde $|B|$ este cardinalul mulţimii B.

Timp de lucru: 4 ore.